ENSAIT
Ecole Nationale Supérieure des
Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE 1994

Epreuve de MATHEMATIQUES II
Durée 2 Heures

(Tous les candidats)

$C^1(I, R)$ désigne l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle de classe C^1 sur l'intervalle I.

tan et cotan désignent respectivement les fonctions tangente et cotangente.

On se propose de montrer que le calcul de $\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\, dx$ peut se ramener au calcul de $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ puis de calculer cette quantité de trois façons.

I. - Valeur de $I = \int_0^1 \ln x \ln(1-x)\, dx$.

1.1 - Montrer que I est convergente.

1.2 - Calculer $J_k = \int_0^1 x^k \ln x\, dx$, pour k entier naturel strictement positif, après avoir montré qu'elle converge.

1.3 - Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ définie par :

$$\forall n \geq 1 \begin{cases} u_n(x) = \frac{x^n}{n} \ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$$

converge normalement sur $[0,1]$.

1.4 - Montrer que : $I = 2 - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$

II. - Calcul de $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$

2.1 - Utilisation d'intégrales de Riemann :

On pose, pour α et β deux réels et pour k entier naturel strictement positif :

$$I_k(\alpha,\ \beta)=\int_0^{\pi}\left(\alpha t+\beta t^2\right)\cos(kt)\ dt$$

2.1.1 - Calculer $I_k(\alpha,\ \beta)$

2.1.2 - Trouver α , β réels tels que

$$\forall k\geq 1 \qquad I_k(\alpha,\ \beta)=\frac{1}{k^2}$$

Dans toute la suite , on prend pour α et β ces deux valeurs.

2.1.3 - Pour des valeurs de t à préciser, montrer que :

$$\forall N\geq 1 : \sum_{K=1}^{N}\cos(kt)= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

2.1.4 - Soit $\varphi \in C^1([0,\pi]\ ,\ \mathbf{R})$

Montrer que $\lim_{U\to\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\ \sin(Ut)\ dt=0$

2.1.5 - On pose : $\varphi(t)=\dfrac{\alpha t+\beta t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$, $\forall t\in\ ]0,\pi]$

Montrer que l'on peut prolonger φ par continuité en 0 et donner $a=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\varphi(t)$

On pose alors $\begin{cases}\varphi_0(t)=\varphi(t) & \forall t\in\ ]\,0,\pi]\\ \varphi_0(0)=a\end{cases}$.

Montrer que $\varphi_0 \in C^1([0,\pi]\ ,\ \mathbf{R})$

2.1.6 - Déduire de ce qui précède la valeur de $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$

2.2 - Utilisation de polynômes :

Pour tout entier naturel n strictement positif, on pose :

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

2.2.1 - Calculer les racines de P_n (on trouvera une expression trigonométrique simple).

2.2.2 - Montrer que : $P_n = \sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p+1}(-1)^p \; X^{2(n-p)}$

On pose alors, pour n entier naturel strictement positif,

$$V_n = \sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p+1}(-1)^p \; X^{n-p}$$

2.2.3 - Donner les racines de V_n .

2.2.4 - Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \cot an^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$

En déduire que : $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$

2.2.5 - En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \sin x \leq x \leq \tan x$$

En déduire un encadrement de $\frac{1}{x^2}$ pour x dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2.2.6 - Déduire de ce qui précède la valeur de $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$

2.3 - Utilisation de séries de Fourier :

On considère dans ce paragraphe la fonction f 2π – périodique définie par :

$$\forall x \in]-\pi, \pi] \quad f(x) = x \; .$$

2.3.1 - Calculer les coefficients de Fourier de f .

2.3.2 - En énonçant le résultat utilisé, écrire f comme somme d'une série.

2.3.3 - En énonçant le résultat utilisé, donner la valeur de $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$.